
METODOLOGÍA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



CURSO 2024-2025

INDICE

1.- INTRODUCCIÓN

1.1 El por qué de una didáctica para la resolución de problemas

2.- ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

3.- CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS

3.1 Por la forma de aparecer los datos y la pregunta

3.2 Por su estructura semántica

3.2.1 Problemas de suma y resta con una operación

3.2.2 Problemas de multiplicar y dividir

4.- PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1 Enunciado y Resolución

4.1.1 Redacción del enunciado del problema

4.1.2 Resolución de problemas

4.2 Pasos para la resolución del problema

1er Paso: entender el problema

2º Paso: realizar una representación gráfica del problema

3er Paso: trazar un plan de actuación

4º Paso: realizar la operación que hemos deducido

5º Paso: comprobar la respuesta

5.- TIPOS Y SECUENCIACIÓN DE PROBLEMAS EN PRIMARIA

5.1 Realización de variedad de problemas

5.2 Cómo plantear la creación de problemas propios

6.- RECURSOS DIDÁCTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

6.1 Consideraciones a tener en cuenta

6.2 Posibles recursos didácticos

6.2.1 Los cuentos como herramientas en la resolución de problemas

6.2.2 Las TIC como herramientas en la resolución de problemas

8.- ANEXOS

DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

“Todos los problemas tienen solución. Si un problema no tiene solución será otra cosa, pero no un problema”.

1.- INTRODUCCIÓN:

Este documento nace con la intención de dar respuesta a lo exigido en las Instrucciones de la Viceconsejería de desarrollo educativo y formación profesional, sobre las medidas para el fomento del razonamiento matemático a través del planteamiento y la resolución de retos y problemas en educación infantil, educación primaria y educación secundaria obligatoria, que tienen como finalidad: fomentar el desarrollo del razonamiento matemático del alumnado. Para lo que se facilitarán orientaciones para su didáctica y metodología, se propondrán medidas organizativas, y se desarrollarán procesos de formación y apoyo dirigidos al profesorado.

1.1.-- El por qué de una didáctica para la resolución de problemas

En este taller usamos la resolución de problemas de base matemática para mejorar las capacidades de comprensión y lógica y el pensamiento estructurado de nuestro alumnado.

Se trata de utilizar la resolución de problemas de forma eficaz tanto en procesos matemáticos como en situaciones de la vida diaria, reflexionando sobre los distintos pasos a seguir, realizando los cálculos necesarios y aplicándolo como estrategia para afrontar cualquier tipo de situación. Las diferentes formas de trabajar en el Taller de Resolución de Problemas desde los primeros cursos son:

- Lectura pausada del enunciado del problema.
- Estudio de las imágenes o dibujos que apoyan el enunciado.
- Reconocimiento de palabras clave en el enunciado.
- Subrayado de los datos importantes.
- Eliminación de datos irrelevantes.
- Organización de los datos en tablas o gráficas cuando sea posible.
- Escribir la pregunta.
- Experimentación de situaciones problemáticas.
- Solución operativa del problema.
- Comprobación de los resultados.

En resumen, con este Taller procuramos que los alumnos desarrollen habilidades personales

para afrontar las tareas matemáticas evitando los bloqueos e inseguridades y reflexionando sobre las decisiones que se deben tomar. Manejen las operaciones básicas de cálculo y sus propiedades en la resolución de problemas, actividades o situaciones de la vida real y utilicen el cálculo mental como herramienta de crecimiento personal y habilidad matemática.

Básicamente se trata de una propuesta metodológica para todos los niveles de Primaria con un especial interés en el Primer Ciclo, pero que a su vez es fácilmente extrapolable a otros niveles educativos, ya que la mayor parte de las actividades propuestas admiten ampliaciones y/o modificaciones con mayor o menor grado de complejidad, para ser utilizadas según las características de los alumnos a los que van dirigidas.

Además, este trabajo, tiene un análisis teórico, del cual emana la propuesta de metodología que hacemos, sobre los distintos aspectos que intervienen en la resolución de problemas, tales como: las actitudes de los docentes y alumnos ante ellos, las diferencias entre el lenguaje tradicional y el matemático, los errores más comunes en el planteamiento y resolución de problemas, la sistematización en su abordaje,... todo ello desde un lenguaje cercano a la tarea diaria de los que nos dedicamos al trabajo de enseñar.

Muchas razones confirman la necesidad de la enseñanza de la resolución de problemas. Entre éstas destacamos:

- La resolución de problemas implica poner un mayor énfasis en el desarrollo del aprendizaje que en su memorización.
- La resolución de problemas es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos.
- Solucionar problemas ayuda a que los estudiantes desarrollen hábitos de organización, trabajo y autoevaluación.
- Contribuye al desarrollo de la capacidad para solucionar otros problemas y aplicar dicho aprendizaje para resolver situaciones de la vida cotidiana.

- Fomenta la participación de los alumnos/as en su propio aprendizaje.
- Ayuda a confiar en sus posibilidades y a desarrollar hábitos de colaboración.
- Permite crear una forma de trabajo satisfactorio, atrayente y divertido, así como el establecimiento de actitudes de participación, gusto por el trabajo, por la precisión, etc.
- Porque la resolución de problemas es aplicable a todas las edades.
- Permite también integrar conceptos, procedimientos y actitudes en una misma secuencia de aprendizaje, ya que, a través de procedimientos, es decir de “hacer” alguna cosa, ya sea contar, clasificar, representar, etc., se llega a sacar conclusiones y a generalizar, y con ello a los conceptos.

2.- ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

A) Generales

a) Cada vez que se afronte el aprendizaje de un nuevo tipo de problemas se sugiere seguir la siguiente secuencia: planteamiento oral del mismo, abordaje manipulativo que ayude a comprender nuevos conceptos y activen la predisposición y motivación para el aprendizaje, actividades de representación gráfica que reduzcan el nivel de abstracción y, por último, trabajo simbólico y algorítmico.

b) La comprensión y expresión lingüísticas son la llave para el acceso a cualquier tipo de aprendizaje, de forma que no se puede adquirir ningún conocimiento sin un dominio básico de la lengua. Por ello, es imprescindible dedicar el tiempo que sea necesario para leer adecuadamente los enunciados con un ritmo y una entonación facilitadora, aclarando conceptos, nuevos léxicos, utilizando sinónimos, fragmentando las partes del enunciado, diferenciando las preguntas del mismo y sustituyéndolas por otras si fuera necesario, para saber identificar y diferenciar la información relevante y qué operaciones son necesarias realizar. Para ello se sugiere utilizar una plantilla adaptada a la estructura de cada tipo de problema y al nivel educativo del alumnado, donde se volcará la información extraída del enunciado: preguntas por orden cronológico, datos organizados, claves semánticas que faciliten la identificación de las operaciones necesarias a realizar y en qué orden, comprobación de la lógica y coherencia del resultado y explicación del mismo.

c) Además, es conveniente trabajar textos matemáticos de distinta naturaleza (tablas de datos y gráficas, etiquetas, tickets de compras, presupuestos, facturas, recetas de cocina, croquis, mapas y escalas, cronogramas, líneas históricas de tiempo, otros textos discontinuos, etc.) que faciliten el tratamiento transversal de otras áreas o materias, compatibles con el abordaje del tiempo diario dedicado a la lectura planificada.

d) Los problemas planteados deben partir de situaciones significativas para el alumnado, lo que facilitará su comprensión y ayudará a identificar los conceptos y las herramientas matemáticas necesarias para su resolución. Será una oportunidad para dar significado a los saberes matemáticos que desarrollan mientras resuelven problemas.

e) Hay que poner el acento en la comprensión, por encima del mero uso de algoritmos. Es importante

desarrollar la capacidad de abordar racionalmente los problemas de su contexto para entenderlos bien; de aprender tanto a analizarlos como a buscar los procedimientos para resolverlos. Son prioritarios el razonamiento, el pensamiento lógico, la aproximación crítica y analítica a los problemas, la perseverancia y la capacidad para buscar ideas y herramientas matemáticas adecuadas.

f) El objetivo del cálculo mental radica en la necesidad de automatizar operaciones aritméticas con la intención de liberar recursos cognitivos necesarios para destinarlos a la comprensión y al adecuado planteamiento de problemas, retos o tareas más complejas. Dicha automatización, que evitará el error mejorando la eficiencia, se conseguirá únicamente si se trabaja de forma planificada, sistemática y progresiva durante todas las semanas lectivas del curso, a través de un diseño coordinado de manera gradual, en progresión de dificultad a lo largo de cada etapa educativa. Así pues, el cálculo mental puede integrarse en las programaciones didácticas y propuestas pedagógicas, bien de manera continua impregnando los contenidos de cada nivel o bien asignando un tiempo fijo, al menos dos o tres veces por semana a modo de rutina, siendo ambas opciones complementarias y no excluyentes, más bien recomendables.

g) La disposición y el uso de espacios específicos para el abordaje del planteamiento y la resolución de retos matemáticos puede ser un elemento metodológico que potencie la motivación y predisponga al alumnado a encarar las sesiones de trabajo. A estos efectos se sugiere diseñar, dentro de las posibilidades de cada centro, laboratorios o talleres aprovechando los existentes, o bien adecuar y adaptar otros espacios comunes (sala de usos múltiples, sala de informática, laboratorio de ciencias, biblioteca de centro), e incluso configurar y diseñar rincones matemáticos en las aulas.

h) Las actividades complementarias pueden ayudar a demostrar y visibilizar al alumnado la conexión real que las matemáticas tienen para la utilidad de la vida cotidiana. Para ello se propone secuenciar a lo largo del curso escolar determinadas actividades complementarias que rompan la rutina y monotonía ordinaria y conecten las matemáticas con otras áreas/materias del currículo. Junto a esto se pueden organizar clubes matemáticos entre varios centros o entre grupos de alumnos de un mismo centro.

b) Educación Infantil.

Para la resolución de retos y problemas en Educación Infantil (segundo ciclo) se podría tener en cuenta lo siguiente:

a) Comenzar con problemas muy sencillos, que partan de los intereses y necesidades del alumnado, vinculados a los elementos del entorno cercano y a las temáticas de las unidades didácticas o proyectos que se desarrollen.

b) Como paso previo a la resolución de retos o problemas, el inicio en las destrezas lógico-matemáticas requiere observar, clasificar, cuantificar, hacer estimaciones y aproximaciones, construir, hacerse preguntas, probar y comprobar, para entender y explicar algunos fenómenos del entorno próximo. Así, la resolución de problemas se realizará de forma guiada y modelada, mediante el uso del lenguaje verbal, en formato de asamblea o diálogo.

c) El tratamiento de los problemas o retos se realizará mediante la manipulación de objetos, la visualización de imágenes, dibujos y símbolos. La utilización de símbolos matemáticos será posterior a la interiorización de los conceptos a través de la manipulación física o la visualización de

imágenes. Es decir, en primer lugar la experiencia corporal o sensible, la oral o verbal y, por último y de forma progresiva, la experiencia simbólica.

El proceso a seguir para afrontar la resolución de retos y problemas en Educación Infantil (segundo ciclo), podría desarrollarse en los siguientes pasos:

1º. Propuesta de retos que hay que resolver, contextualizados en situaciones de aprendizaje y experiencias significativas, planteando preguntas que requieran del razonamiento matemático y faciliten la comprensión. Dramatización y juego sobre la situación.

2º. Diálogo guiado sobre las posibilidades o alternativas que puedan darse, acompañado de la manipulación, la visualización real o figurada, el uso de imágenes, etc.

3º. Búsqueda y aportación de las informaciones concretas que se necesiten, mediante la manipulación, el dibujo, las imágenes, etc.

4º. Posibles alternativas para resolverlo (cálculos u operaciones), de forma manipulativa o gráfica, con apoyo lingüístico. Establecimiento de inferencias y relaciones causa-efecto. Propuesta de soluciones.

5º. Es de gran importancia la adecuada y sistemática utilización de diferentes colores a la hora de categorizar ideas, conceptos, nociones topológicas y temporales básicas (dentro, fuera, cerca, lejos, delante, detrás, arriba, abajo, grande, pequeño, anterior, posterior, pronto, tarde, mayor, menor, etc.) o para adquirir el concepto de número. Por ejemplo, si las unidades se colorean en azul, siempre se deberá utilizar ese color en toda la etapa de infantil y luego continuar con ese mismo criterio en primaria.

6º. Resultado obtenido, con expresión manipulativa, con representación gráfica o mediante dibujos. Dramatización y juego sobre los efectos o consecuencias del mismo.

7º. Reflexión guiada, mediante el lenguaje, sobre el proceso seguido. Comprensión del sentido de las operaciones realizadas y del lenguaje de las Matemáticas. Sentido, coherencia y comprobación del resultado obtenido.

B) Educación Primaria

La resolución de retos y problemas, a lo largo de la etapa, se podría establecer siguiendo un proceso gradual de complejidad creciente, considerando lo siguiente:

- a) Se comenzará con preguntas sobre situaciones cercanas al entorno del alumnado, significativas y motivadoras, en las que se enfrenten a la resolución de problemas a partir de planteamientos sencillos de manera que, mediante la aplicación de estrategias simples, de forma guiada, con manipulación o uso de imágenes, se dé respuesta a las preguntas formuladas. A partir de aquí se avanzará en el abordaje de situaciones más complejas, en la formulación y reformulación por parte del alumnado de nuevas preguntas pertinentes y, por tanto, de nuevos problemas matemáticos, mediante el uso de métodos inductivos y deductivos de razonamiento matemático en situaciones conocidas, seleccionando las estrategias adecuadas.

- b) La resolución implicará un orden creciente de complejidad, dificultad y exigencia de las operaciones de cálculo, medidas y geometría, partiendo de las más simples y progresando en el uso de la simbología matemática y en la resolución de cálculos numéricos y de medidas. Además se deberá trabajar de forma periódica y constante las estimaciones y aproximaciones.
- c) Debe avanzarse hacia la formulación y resolución de problemas por parte del alumnado, aportando la información necesaria y planteando las preguntas necesarias. A lo largo de toda la etapa, se procurará un progresivo aumento de la capacidad de comunicación de los resultados, desde la más sencilla hasta formulaciones más ordenadas y organizadas, así como la reflexión cada vez más compleja sobre el proceso seguido. Es importante que el alumnado aprenda igualmente a clarificar los pasos seguidos y los comparta con el resto del grupo, de manera que se generen dinámicas o espacios para el desarrollo compartido de estrategias y la comprensión colectiva de las herramientas matemáticas utilizadas.
- d) Diseñar para el primer ciclo de la etapa los espacios del aula en rincones, destinando uno de ellos al abordaje de los saberes básicos relacionados con la competencia matemática a través de un trabajo lúdico con materiales manipulativos (clasificar, cuantificar, hacer estimaciones y aproximaciones, comparar, dibujar, encajar).
- e) Organizar la práctica docente en el aula a través de talleres para enfocar de los saberes básicos relacionados con la competencia matemática a través de un trabajo lúdico con materiales manipulativos, aprendizajes basados en proyectos o metodologías cooperativas en pequeños grupos.

En Educación Primaria, para la resolución de retos y problemas se podrían seguir los siguientes pasos :

- 1º. Planteamiento de una situación problemática cercana o conocida que requiera el uso de las Matemáticas. Diálogo sobre la misma, aportación de informaciones complementarias. Relación con otras situaciones conocidas, ya resueltas o en proceso de resolución.
- 2º. La comprensión de la situación es siempre el primer paso hacia su resolución. La representación o visualización del problema ayuda a su interpretación, así como a la identificación y organización de los datos y el establecimiento de relaciones entre ellos. Análisis de la información que se aporta, de la que sería necesaria o aquella descartable. Identificación de las preguntas a resolver así como su intención para llegar a una comprensión de las mismas.
- 3º. Identificación de estrategias para resolver el problema y para el desarrollo del razonamiento. El uso de diferentes estrategias permite descubrir una diversidad de opciones para obtener posibles soluciones: analogía, ensayo-error, resolución inversa, tanteo, descomposición en pasos o problemas más sencillos. Las estrategias no deben centrarse únicamente en la resolución aritmética sino en la argumentación y la reflexión. Toma de decisiones sobre las operaciones necesarias y el orden de las mismas para la resolución del problema.
- 4º. Aplicación de estrategias y ejecución de los cálculos y operaciones. Búsqueda de las posibles conexiones entre la información y las operaciones necesarias para la resolución.

5°. Es de gran importancia la adecuada y sistemática utilización de diferentes colores a la hora de categorizar ideas, conceptos, nociones topológicas y temporales básicas (dentro, fuera, cerca, lejos, delante, detrás, arriba, abajo, grande, pequeño, anterior, posterior, pronto, tarde, mitad, entero, parte, mayor que, menor que, etc.) y para adquirir el concepto de número. Por ejemplo, cuando se trabaje la numeración en base diez o decimal, para evidenciar o describir el valor posicional/numérico de los dígitos, si las unidades se colorean en azul, las decenas en rojo, las centenas en verde y las unidades de millar en negro, siempre se deberá utilizar esos mismos colores a lo largo de toda la etapa ya que cada color simboliza el significado de categorías o valores diferentes.

Igualmente será de utilidad metodológica el uso de distintos colores para subrayar los datos de los enunciados, las palabras claves que determinen las operaciones a realizar y la estrategia a seguir, así como la pregunta o preguntas a resolver.

6°. Resolución: comprobar la corrección matemática de la solución y la validez de los resultados obtenidos. La representación puede contribuir a valorar la coherencia y sentido de los resultados.

7°. Reflexión conjunta sobre el proceso seguido. Comunicación oral y/o escrita de dicho proceso y del resultado obtenido.

3.- CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

3.1. -Por la forma de aparecer los datos y la pregunta

La complejidad de los algoritmos implicados en su resolución nos permite distinguir seis grupos de problemas:

- Problemas **CONSISTENTES O SIMPLES**: En este tipo de problemas los datos y pregunta del enunciado llevan directamente a la solución y al algoritmo que se ha de aplicar que se pueden resolver con una sola operación. Si el problema es de restar, primero aparece el minuendo y después el sustraendo; si es de dividir, primero aparece el dividendo y luego el divisor. Por lo que respecta a la pregunta, en este tipo de problemas, debe ir al final del texto y preguntar por la cantidad final.

Ejemplo: - “Manuel tenía ocho monedas y su abuelo le regala cuatro más. ¿Cuántas monedas tiene ahora?-. - “Un pastor tenía doce ovejas y vendió cuatro. ¿Cuántas ovejas le quedan?”.

- Problemas **INCONSISTENTES o SIMPLES INVERTIDOS**: En este tipo de problemas los datos y pregunta del enunciado se presentan en orden inverso al que corresponde a la operación aritmética requerida para su resolución y que también se pueden resolver con una sola operación.

Si el problema es de restar, primero aparece el sustraendo y luego el minuendo, o si es de dividir, primero aparece el divisor y luego el dividendo. En dichos problemas la pregunta se refiere a la cantidad inicial o a la transformación y se formula al principio o en medio del enunciado. También se consideran inconsistentes aquellos problemas cuyo enunciado contiene un concepto verbal con significado contrario a la operación requerida para su resolución como puede ser “**más**” cuando es de restar o “**menos**” cuando es de sumar. Esto hace que surja un conflicto en el sujeto cuando intenta resolver el problema, ya que debe vencer la tendencia a resolverlo de manera rectilínea por la lectura de los datos del problema

Ejemplos de problemas inconsistentes:

- “¿Cuántos cromos le faltan a Manuel, que tiene ocho cromos, para tener la misma cantidad que Luís, que tiene doce cromos?” Este es un problema INCONSISTENTE porque la pregunta está situada al principio y además el orden de los datos es inverso al requerido por la operación..

“Manuel tiene doce cromos y Luis tiene seis cromos. ¿Cuántos cromos tiene Manuel más que Luis? Se trata de un problema INCONSISTENTE porque la resolución del problema induce al error, ya que el concepto verbal “más” el alumno lo asocia con añadir o sumar, mientras que el problema se resuelve restando.

3.2.- Por su estructura semántica:

Centrándonos en los problemas que podemos encontrar en Educación Primaria y partiendo de la clasificación que hacen, entre otros, J. Luis Luceño Campos y Jaime Martínez Montero, tenemos los siguientes tipos de problemas:

- En los problemas de estructura aditiva tendríamos las siguientes categorías básicas: cambio, combinación y comparación e igualdad.

Dentro de los problemas la clasificación de cambio y combinación diferenciaremos en base a que las cantidades utilizadas sean de la misma (cambio) o de distinta naturaleza (combinación).

- En los problemas de estructura multiplicativa tendríamos las siguientes categorías: multiplicación-división-razón, multiplicación-división-escalares y multiplicación-división - combinación (producto cartesiano).

Así pues, en cada problema que presentamos a continuación tendremos en cuenta:

- Categoría y tipo.
- Nivel de dificultad por edades, ciclo y curso académico.

- Ejemplos.

3.2.1.- Problemas de suma y resta con una operación

A.- Categoría de CAMBIO y sus tipos

La categoría de CAMBIO (CA): Se trata de problemas en los que se parte de una cantidad, a la que se añade o se le quita otra de la misma naturaleza.

En los problemas de CAMBIO se puede preguntar por la cantidad final, por la cantidad resultante de la transformación, y por último la cantidad inicial. Cada una de estas tres posibilidades se puede enfocar desde dos puntos de vista: la cantidad crece o decrece.

De aquí surgen los 6 tipos de problemas de CAMBIO.

TIPOS DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
CAMBIO 1(CA1) Problema de sumar. Se conoce cantidad inicial. Se le hace crecer. Se pregunta por la cantidad final	1er Ciclo I 1º E. Primaria 6 años	Antonio tenía en su hucha ocho euros. Después de su comunión, metió otros doce euros. ¿Cuánto dinero tiene ahora en la hucha?"
CAMBIO 2(CA2) Problema de restar: se parte de una cantidad inicial a la que se le hace disminuir. Se pregunta por la cantidad final.	Ciclo Iº 1º E. Primaria 6 años	Antonio tenía en su hucha ocho euros. En su cumpleaños se ha gastado cinco euros. ¿Cuánto dinero tiene ahora en la hucha?"
CAMBIO 3 (CA3) Problema de restar: se conoce la cantidad inicial y se llega, mediante una transformación, a una cantidad final conocida mayor. Se pregunta por el aumento (transformación)	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 7 - 8 años	Andrés tenía catorce tazos. Después de jugar ha reunido dieciocho. ¿Cuánto
CAMBIO 4(CA4) Problema de restar: Se parte de una cantidad inicial y, por una transformación, se llega a una cantidad final conocida y menor que la inicial. Se pregunta por la transformación.	Ciclo Iº-IIº 2º E. Primaria 7 - 8 años	Andrés tenía catorce tazos. Después de jugar le quedan sólo ocho tazos. ¿Cuántos ha perdido?"
CAMBIO 5 (CA5) Problema de restar: se tiene que averiguar la cantidad inicial conociendo la cantidad final y lo que ha aumentado. Se pregunta cantidad inicial.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 8 - 9 años	Jugando he ganado 7 canicas, y ahora tengo 11. ¿Cuántas canicas tenía antes de empezara jugar?"

CAMBIO 6 (CA6) Problema de sumar: se tiene que averiguar la cantidad inicial y se conoce la cantidad final y su disminución. Se pregunta cantidad inicial	Ciclo I°-II° 2°-3° E. Primaria 8 años	Jugando he perdido 7 canicas, y ahora me quedan 4. ¿Cuántas canicas tenía antes de empezar a jugar?"
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------

(Fuente: "Proyecto de Formación en Centros". Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

A2.- Categoría de COMBINACIÓN y sus tipos

La categoría de COMBINACIÓN (CO): se trata de problemas en los que se tienen dos cantidades, las cuales se diferencian en alguna característica.

En los problemas de COMBINACIÓN se puede preguntar por la cantidad total que se obtiene cuando se reúnen las anteriores, o cuando conociendo la total y una de aquellas, se quiere saber cuál es la otra.

De aquí surgen los 2 tipos de problemas de COMBINACIÓN.

TIPOS DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
COMBINACIÓN 1 (CO1) Problema de sumar: se conocen las dos partes y se pregunta por el todo.	1er Ciclo I 1° E. Primaria 6 años.	"Luisa tiene doce bombones rellenos y cinco normales. ¿Cuántos bombones tiene Luisa en total?"
COMBINACIÓN 2 (CO2) Problema conmutativo y de restar: es el problema inverso al anterior, puesto que se conoce el todo y una de las partes, y se pregunta por la otra.	Ciclo I°-II° 2°-3° E. Primaria 8 años	"Luisa tiene doce bombones contando los rellenos y los normales. Si tiene diez rellenos, ¿cuántos bombones normales tiene Luisa?"

A3.- Categoría de COMPARACIÓN y sus tipos

La categoría de COMPARACIÓN (CM): Problemas en los que se comparan dos cantidades. Los datos del problema son precisamente esas cantidades y la diferencia que existe entre ellas. De estas dos cantidades, una es la comparada y otra la que sirve de

referente. La diferencia es la distancia que se establece entre ambas. En los problemas de COMPARACIÓN se puede preguntar por la diferencia si se conocen las dos cantidades, por la cantidad comparada cuando se conocen el referente y la diferencia, o por la cantidad referente, si se conocen la comparada y la diferencia.

Cada una de estas tres posibilidades se puede enfocar desde dos puntos de vista: si preguntamos por cuántos más o por cuántos menos.

De aquí surgen los 6 tipos de problemas de COMPARACIÓN

TIPOS DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
COMPARACIÓN 1 (CM1) Problema de restar: Conocemos las dos cantidades y se pregunta por la diferencia en el sentido del que tenemos más. Problema de INCONSISTENTE. Es difícil porque la formulación del problema induce a error, ya que el alumno/a asocia “añadir” a “sumar”	Ciclo Iº-IIº 3º E. Primaria 8 años	"Marcos tiene ocho euros. Raquel tiene cinco euros. ¿Cuántos euros más que Raquel tiene Marcos?"
COMPARACIÓN 2 (CM2) Problema de restar: conocemos las dos cantidades y se pregunta por la diferencia en el sentido del que tenemos menos.	Ciclo Iº-IIº 1º-3º E. Primaria 6 - 8 años	"Marcos tiene treinta y siete euros. Raquel tiene doce euros. ¿Cuántos euros tiene Raquel menos que Marcos?"
COMPARACIÓN 3 (CM3) Problema de sumar: se conoce la cantidad del 1º y la diferencia “en más” del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria 8-9 años	"Esther tiene ocho euros. Irene tiene cinco euros <u>más</u> que ella. ¿Cuánto dinero tiene Irene?"
COMPARACIÓN 4 (CM4) Problema de restar: se conoce la cantidad del 1º y la diferencia “en menos” del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º Problema para el 1er Ciclo de EP. aunque algunos alumnos/as no lo dominan hasta el 2º Ciclo.	Ciclo Iº 2º- E. Primaria 7-8 años	"Esther tiene ocho euros. Irene tiene cinco euros <u>menos</u> que ella. ¿Cuánto dinero tiene Irene?"

COMPARACIÓN 5 (CM5) Problema de restar: se conoce la cantidad del 1º y su diferencia “en más” con la del 2º. Se pregunta por cantidad del 2º	Ciclo IIº-IIIº 2º-3º E. Primaria8- 11 años	. "Rosa tiene diecisiete euros, y tiene cinco euros <u>más</u> que Carlos. ¿Cuántos euros tiene Carlos?"
COMPARACIÓN 6 (CM6) Problema de sumar: se conoce la cantidad del 1º y su diferencia “en menos” con la del 2º. Se pregunta por cantidad del 2º Problemas para el 2º -3º Ciclo de E.P. Y requiere mucho entrenamiento.	Ciclo IIº-IIIº 2º-3º E. Primaria8- 11 años	Rosa tiene diecisiete euros, y tiene cinco euros <u>menos</u> que Carlos. ¿Cuántos euros tiene Carlos?"

(Fuente: “Proyecto de Formación en Centros”. Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada)

A4.- Categoría de IGUALACIÓN y sus tipos

La categoría de IGUALACIÓN (IG): Problemas que contienen dos cantidades diferentes, sobre una de las cuales se actúa aumentándola o disminuyéndola hasta hacerla iguala la otra, de estas dos cantidades, una es la cantidad a igualar y la otra es la cantidad referente. La transformación que se produce en una de dichas cantidades es la igualación.

La diferenciación con la categoría de comparación está en que cuando se compara no se añade ni se quita nada, cuando se iguala necesariamente se añade o quita algo.

En los problemas de IGUALACIÓN se puede preguntar por la cantidad a igualar, por la referente o por la igualación.

De aquí surgen los 6 tipos de problemas de IGUALACIÓN.

TIPOS DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
IGUALACIÓN 1 (IG1) Problema de restar: conocemos cantidades del 1º y del 2º. Se pregunta por el aumento de la cantidad menor para igualarla a la mayor. Problema INCONSISTENTE. Es difícil porque la formulación del problema induce al error, ya que el alumno/a asocia “añadir” a “sumar”.	Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria9 - 10 años	Marcos tiene ocho euros Raquel tiene cinco euros. ¿Cuántos euros le tienen que dar a Raquel para que tenga los mismos que Marcos?"

IGUALACIÓN 2 (IG2) Problema de restar: conocemos cantidades del 1º y del 2º y se pregunta por la disminución de la cantidad mayor para igualarla a la menor.	Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria - 10 años	“Marcos tiene ocho euros. Raquel tiene cinco euros. ¿Cuántos euros tiene que perder Marcos, para tener los mismos que Raquel.
IGUALACIÓN 3 (IG3) Problema de restar muy difícil: conocemos la cantidad del 1º y lo que hay que añadir a la 2º para igualarla con la 1ª. Se pregunta por la cantidad del 2º. Problema INCONSISTENTE. La dificultad principal radica en que refleja una situación de igualación en que, para alcanzar la solución, se debe realizar lo contrario de lo que se señala en el enunciado	Ciclo IIº 3ª-4ª E. Primaria 9- 10 años	Juan tiene diecisiete euros .Si Rebeca ganara seis euros, tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos euros tiene Rebeca
IGUALACIÓN 4 (IG4) Problema de sumar muy difícil: conocemos cantidades del 1º y lo que hay que quitar a la 2º para igualarla con la 1ª. Se pregunta por la cantidad del 2º. Problema INCONSISTENTE. La dificultad principal radica en que refleja una situación de igualación en que, para alcanzar la solución, se debe realizar lo contrario de lo que se señala en el enunciado.	Ciclo IIº 3º- 4º E. Primaria - 10 años	“Juan tiene diecisiete euros. Si Rebeca perdiera seis euros, tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos euros tiene Rebeca?
IGUALACIÓN 5 (IG5) Problema de sumar: conocemos cantidades del 1º y lo que hay que añadirle para igualarla con la del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º.	Ciclo IIº-IIIº 3º- 4º-5º E. Primaria. 9 - 11 años	“Marcos tiene ocho euros . Si le dieran cinco euros más, tendrían los mismos que tiene Rafael.¿ Cuántos euros tiene Rafael?”.
IGUALACIÓN 6 (IG6) Problema de restar: conocemos cantidades del 1º y lo que hay que quitarle para igualarla con la del 2º. Se pregunta por la cantidad del 2º.	Ciclo IIº-IIIº 3º- 4º-5º E. Primaria. 9 - 11 años	“Marcos tiene ocho euros . Si perdiera cinco euros más, tendría los mismos que tiene Rafael.¿ Cuántos euros tiene Rafael?”

3.2.2.- Problemas de multiplicar y dividir

A.- Problemas de multiplicar:

El tratamiento didáctico de los problemas con estructura multiplicativa, desde el punto de vista semántico, requiere un pequeño análisis previo de los elementos que vamos a tener en cuenta para su clasificación: el multiplicador, la distinción entre cantidades intensivas y extensivas, y las combinaciones entre los elementos que las componen. A.1.- El Multiplicador:

Debemos conseguir que los alumnos/as entiendan al multiplicador como un número distinto a los que trabajó hasta ahora. Por tanto tendrá que descubrir su nuevas propiedades:

A.- Que se trate de una unidad flexible que hay que determinar en cada situación problemática. A.1.- El multiplicador puede ser el número que indica cuántas veces se repite una cantidad de la misma naturaleza. Ejemplo:

“Tengo tres bolsas de tomates con ocho tomates cada una. ¿Cuántos tomates tengo?”. Los tomates se repiten una determinada serie de veces, sin embargo el resultado sigue siendo tomates.

A.2.- El multiplicador también puede indicar una cantidad de diferente naturaleza a la representada por el multiplicando. Ejemplo:

“Tengo treinta kilos de tomates a dos euros cada kilo. ¿Cuánto cuestan los tomates?”. El resultado ya no son tomates sino euros, es decir, cambia el referente.

B.- El multiplicador puede representar una proporción/razón que se establece entre dos cantidades. Ejemplo: “20 tomates por bolsa, Un ordenador por cada dos alumnos”. En este caso tampoco hay transformación del referente, ni existe una realidad física que represente dicha proporción, sino sólo una relación mental entre dichas cantidades.

C.- En el producto cartesiano combinamos las cantidades del multiplicando y del multiplicador para obtener una tercera (producto) diferente.

D.- Que se trata de un mecanismo que permite economizar tiempo y esfuerzo sustituyendo varias sumas por una sola operación. Cuando un niño utiliza la suma para resolver un problema de multiplicar es que no ha entendido el significado del multiplicador.

B.2.- Cantidades extensivas e intensivas:

Las cantidades extensivas son aquellas que tienen una extensión y pertenecen al mundo real (manzanas, mesas, dinero, etc.). Dichas cantidades pueden ser: continuas (longitud, peso, capacidad...) o discontinuas (naranjas, dinero, caramelos...). Las cantidades intensivas son aquellas que se forman por combinación o razón de cantidades extensivas. Son razones o proporciones que establecemos, pero que no están físicamente en ninguna parte. Ejemplo “kilómetros por hora, la densidad, unidades de producto por envase, densidad”.

Un caso especial de este tipo de cantidades intensivas son los escalares, o proporciones a escala que se establecen entre cantidades extensivas o intensivas. Existen distintas combinaciones de cantidades extensivas para formar cantidades intensivas:

A.- Extensivas: discontinuas / discontinuas: “pasajeros por autobús”, “huevos por envase”...

B.- Extensivas: continuas / discontinuas: “Kilos de tomates por caja”. C.- Extensivas: continuas / continuas: “km por hora, tiempo en recorrer una distancia.”

A.3.- Las Combinaciones (Producto Cartesiano)

La multiplicación es una operación que permite resolver las combinaciones que se pueden establecer entre los elementos de dos conjuntos. Por ejemplo, calcular cuántas parejas de baile se podrían formar con un conjunto de chicos y otro de chicas. Las distintas combinaciones se construyen mentalmente, si bien algunas se pueden reproducir en la realidad y otras no.

B.- Problemas de Dividir:

A partir de una multiplicación dada ($60 \times 4 = 240$), se originan dos posibles divisiones ($240 : 60 = 4$ y $240 : 4 = 60$) en función de la cantidad que se tome por divisor. Ambas son conceptualmente iguales, pero una es una partición y la otra es un agrupamiento.

B.1.- División Partitiva:

La división de partición correspondería al siguiente problema: “Se reparten por igual 240 pasajeros entre 4 autobuses. ¿Cuántos pasajeros viajan en cada uno?”

Sería aquella en la que el dividendo (pasajeros) y el divisor (autobuses) son de distinta naturaleza. Se hace una partición del conjunto de pasajeros porque se pregunta por la proporción o razón (60 pasajeros por autobús).

B.2.- División por Agrupamiento:

La división de agrupamiento correspondería al siguiente problema: “Se reparten por igual 240 pasajeros entre varios autobuses. Si cada autobús transporta 60 pasajeros, ¿cuántos autobuses se necesitan?”. Sería aquella en la que el dividendo (pasajeros) y el divisor (pasajeros por autobús) son de la misma naturaleza. Se pregunta por el número de autobuses, es decir, una realidad concreta y no por una proporción.

B.3.- Categorías de los problemas de estructura multiplicativa:

Aclarados los conceptos anteriores, en el apartado siguiente presentamos las categorías semánticas de los problemas de estructura multiplicativa (problemas de multiplicar/dividir).

Para la clasificación semántica de estos problemas nos fijaremos en el carácter y tipo de cantidades que se utilizan.

B.3.1.- Categoría de MULTIPLICACIÓN - DIVISIÓN RAZÓN y sus tipos

Problemas en los que se establecen entre los datos y la solución una función de proporcionalidad directa. Se trata de problemas que utilizan cantidades extensivas discontinuas (naranjas, dinero, caramelos...).

Es la categoría más sencilla al no plantear contradicciones entre su sentido y las operaciones con las que se resuelven. Dichas operaciones guardan un estrecho parentesco con las de sumar y restar, por lo que a veces los alumnos los resuelvan con estas últimas.

TIPO DE PROBLEMA	NIVEL ACADÉMICO	EJERCICIOS
MULTIPLICACIÓN RAZÓN 1 Dada una cantidad de determinada naturaleza (multiplicando) y el “número de veces” que se repite (multiplicador Razón 1), se pregunta por la cantidad resultante (producto), que es de la misma naturaleza que el multiplicando.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria7 - 8 años	“Agustín lleva al contenedor ocho envases vacíos de vidrio, va cuatro veces en el día, y siempre que va lleva el mismo nº de envases. ¿Cuántos envases ha llevado en total durante el día?”
MULTIPLICACIÓN RAZÓN 2 Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (multiplicando y multiplicador), se pregunta por la cantidad resultante (producto) que es de la misma naturaleza.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria7 - 8 años	“Hay cuatro montones de manzanas, cada montón tiene treinta y dos manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en total en los cuatro montones?”.
MULTIPLICACIÓN RAZÓN 3 Dada una cantidad de naturaleza “A” (multiplicando) y otra de naturaleza “B” (multiplicador- Razón3), se pregunta por la cantidad resultante (producto) de la misma naturaleza que el multiplicador. Es un problema donde se establece una relación o proporción fija que se cumple en todos los casos comprendidos en el multiplicador.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria7 - 8 años	“Jaime compra cinco cuentos. Cada cuento cuesta tres euros ¿Cuántos euros pagó?”.
DIVISIÓN PARTICIÓN / RAZÓN Dada una cantidad de naturaleza “A” (dividendo) y otra de naturaleza “B” (divisor), se pregunta por la cantidad resultante de la misma naturaleza que el dividendo.	Ciclo Iº-IIº 2º-3º E. Primaria7 - 8 años	“Una colección consta de noventa y seis cromos. Su álbum tiene doce páginas. En todas ellas se pega el mismo nº de cromos ¿Cuántos cromos se pegan en cada página?”

DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO RAZÓN Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (dividendo y divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de distinta naturaleza que las anteriores.	Ciclo IIº 3º E. Primaria 8 años.	“Una colección consta de 96 cromos. Si en cada página del álbum pegamos 8 cromos. ¿Cuántas páginas tendrá el álbum?”.
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

B.3.2. - Categoría de MULTIPLICACIÓN - DIVISIÓN ESCALARES

Las cantidades escalares, como hemos indicado, son un caso especial de cantidades intensivas, donde se establece una proporciones a escala entre las cantidades extensivas o intensivas. Sus tipos pueden ser:

1.- Comparación: Utilizan los términos “veces más”, “veces menos”, “doble”, “triple”, etc.

El lenguaje en que se expresa el problema, al igual que ocurre en los problemas de estructura aditiva, puede dar lugar a interpretaciones erróneas por los niños, al tener un sentido distinto con el que se presentan las operaciones que lo resuelven. En estos casos hablaremos nuevamente de problemas inconsistentes. Ejemplo: “Cuando en el enunciado de un problemas se expresa “3 veces más” puede ser interpretada como adición y en el caso de “3 veces menos” como resta.”

En los problemas de comparación, el carácter del texto que envuelve al problema es de tipo estático, que implica la ausencia de acciones. Ello hace que sólo intervengan verbos de estado, y no aparezcan por ningún lado verbos de acción.

TIPO DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICO	EJERCICIOS
MULTIPLICACIÓN COMPARACIÓN “EN MÁS” Problema de multiplicar que expresa la regla de proporción entre ambas cantidades. Dada la cantidad de uno (multiplicando) y las veces que otro la tiene de más (multiplicador) , se pregunta por la cantidad resultante(producto) de la misma naturaleza que el multiplicando.	Ciclo IIº-IIIº 4º-5º E. Pri.9-11 años	“Juan tiene ocho euros. Luisa tiene cuatro veces más dinero que él. ¿Cuánto dinero tiene Luisa?”.
DIVISIÓN PARTITIVA COMPARACIÓN “EN MÁS” Dada la cantidad de uno (dividendo) y las veces que otro la tiene de más (divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de la misma naturaleza que el dividendo.	Ciclo IIº-IIIº 4º-5º E. Primaria. 9-11 años	“Luisa tiene treinta y dos euros, que es cuatro veces más que el dinero que tiene Juan. ¿Cuántos euros tiene Juan?”.

<p>DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO COMPARACIÓN “EN MÁS”. Problema que se resuelve con una división por agrupación, porque el dividendo y el divisor son de la misma naturaleza. Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (dividendo y divisor), se pregunta por el número de veces (cociente) que una es mayor que otra. Es un problema de pura comparación, puesto que no hay nada que se parezca a un reparto.</p>	<p>Ciclo II-III(4º-5º E.P.)</p> <p>9-11 años</p>	<p>“Antonio recibe cada fin de semana 25 euros. Su primo Daniel 100 euros. ¿Cuántas veces más recibe Daniel que Antonio?</p>
<p>MULTIPLICACIÓN COMPARACIÓN “EN MENOS” Este problema inconsistente que se resuelve con una multiplicación. Dada la cantidad de uno (multiplicando) y las veces que otro la tiene de menos (multiplicador), se pregunta por la cantidad resultante (producto) de la misma naturaleza que el multiplicando. Es complicado porque su sentido y vocabulario induce a otras operaciones (resta o división).</p>	<p>Ciclo IIIº</p> <p>5º-6º</p> <p>E. Primaria</p> <p>10 -11años</p>	<p>“Aurelio tiene 8 euros. Tiene tres veces menos dinero que Ana. ¿Cuánto dinero tiene Ana?”.</p>
<p>DIVISIÓN PARTITIVA COMPARACIÓN “EN MENOS” Problema que se resuelve con una división Partitiva. Dada la cantidad de uno (dividendo) y las veces que otro la tiene de menos (divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de la misma naturaleza que el dividendo.</p>	<p>Ciclo IIIº</p> <p>5º-6º</p> <p>E. Primaria.</p> <p>10 -11 años</p>	<p>“Ángel tiene treinta y seis euros. Marta tiene cuatro veces menos dinero que Ángel. ¿Cuántos euros tiene Marta?”.</p>
<p>DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO COMPARACIÓN “EN MENOS” Problema que se resuelve con una división por agrupación, porque el dividendo y el divisor son de la misma naturaleza. Dadas dos cantidades de la misma naturaleza (dividendo y divisor), se pregunta por el número de veces (cociente) que una es menor que otra.</p>	<p>Ciclo IIIº</p> <p>5º-6º E. Primaria</p> <p>10 -11 años</p>	<p>“Mª Carmen tiene cuarenta y cinco euros . Félix tiene nueve euros ¿Cuántas veces menos dinero tiene Félix que Mª Carmen ?”.</p>

2. - **Fórmula:** Son los que dependen de una fórmula. Por ejemplo los que ligan velocidad, tiempo y espacio recorrido.

TIPO DE PROBLEMA	NIVEL ACADÉMICO	EJEMPLOS
MULTIPLICACIÓN FÓRMULA Equivale a un problema de Multiplicación Razón 3, aunque utiliza conceptos de espacio y tiempo que implican una mayor dificultad.	Ciclo III° 5°-6° E. Primaria. 10 -11 años	“Un señor recorre cuarenta y cinco Km. en una hora. ¿Cuántos Km. recorrerá en tres horas?”.
DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO FÓRMULA Equivale a un problema de División Razón por agrupamiento, aunque utiliza conceptos de espacio y tiempo que implican una mayor dificultad.	Ciclo III° 5- 6° E. Primaria10 – 11 años	Si caminas a una velocidad de cinco Km . por hora. ¿Cuántas horas tardarás en recorrer veinticinco Km?
DIVISIÓN PARTITIVA FÓRMULA Equivale a un problema de División Razón Partición, aunque utiliza conceptos de espacio y tiempo que implican una mayor dificultad.	Ciclo III° 5° 6° E. Primaria 10- 11 años	“¿ A qué velocidad irá un coche ,si en 5 horas recorre 650 km?”

B.3.3. - Categoría de MULTIPLICACIÓN-DIVISIÓN COMBINACIÓN o PRODUCTO CARTESIANO

Esta categoría implica la combinación de dos cantidades determinadas, para formar una tercera que no es igual ni al multiplicando ni al multiplicador. Es el caso del producto cartesiano, donde se establece la combinación uno a uno de los elementos de los dos factores, con independencia del orden de colocación de los mismos.

Son problemas muy difíciles para los niños. Emplean cantidades simétricas, puesto que ambas juegan el mismo papel. Por ello la multiplicación es conmutativa y tan sólo se presenta un tipo de problemas de dividir.

TIPOS DE PROBLEMAS	NIVEL ACADÉMICOS	EJEMPLOS
MULTIPLICACIÓN COMBINACIÓN PRODUCTO CARTESIANO 1 (PC 1) Dadas dos cantidades de distinta naturaleza (multiplicando y multiplicador), se pregunta por el número de combinaciones posibles (producto).	Ciclo IIIº 5º-6º E. Primaria. 10 -11 años	“En un baile hay tres chicos y dos chicas. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar?”.
DIVISIÓN COMBINACIÓN O PRODUCTO CARTESIANO 2 (PC 2) Dada una cantidad (dividendo) y el número de combinaciones (divisor), se pregunta por la otra cantidad que se combina (cociente).	Ciclo IIIº 5º-6º E. Primaria. 10 -11 años	“En un baile hay tres chicos y algunas chicas. Se pueden formar seis parejas distintas entre ellos. ¿Cuántas chicas hay en el baile?”.

4.- PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: COMPRENDER, REPRESENTAR, PLANTEAR, ACTUAR Y REFLEXIONAR.

4.1.- Enunciado y Resolución:

Una vez analizados las dificultades que presenta la resolución de problemas para los alumnos, nuestro plan de intervención constará de dos partes, uno en el cual trataremos sobre la redacción del enunciado del problema y otro sobre la resolución del mismo.

4.1.1.- Redacción del enunciado del problema:

En un primer momento, este apartado, corresponde al docente ya que los problemas que propongamos a nuestros alumnos deberán tener unos requisitos básicos que eviten que el error, en la resolución, venga provocado desde fuera; pero igualmente, con posterioridad, serán los alumnos los que deberán sujetarse a estos requisitos a la hora de plantearlos ellos. Por tanto en la redacción de los problemas tendremos en cuenta: - El nivel educativo al que van dirigidos, no olvidando que los alumnos de Primaria, son niños y que como tales disfrutan del juego como una de sus actividades preferidas, por ello nuestros problemas (orales y/o escritos) deben tener un altísimo componente lúdico. - Los contextos de los problemas deben referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes, a las sociales de su mundo y a otras áreas del curriculum que giren entorno a sus experiencias.

- Utilizaremos palabras del vocabulario del nivel de competencia curricular del alumno y ajustándolo a los centro de interés que vayamos trabajando.

- Muchas de las dificultades que genera el lenguaje en el que está expresado el problema pueden salvarse si el enunciado va acompañado de gráficos y dibujos en los que se destaquen los datos relevantes. Si el problema ya está redactado y carece de esta ayuda, previa a la ejecución del mismo los alumnos deberán representarlo gráficamente, y si el problema incluye el gráfico o dibujo, se analizará tanto el texto como el gráfico a fin de realizar las conexiones mentales necesarias para una buena comprensión.
- En otras ocasiones, cuando el problema lo permita, según la complejidad del mismo así como en los primeros niveles del alumno, pueden realizarse problemas “sin palabras”, mediante dibujos, objetos de manipulación o dramatizaciones.
- Los datos numéricos se presentarán con su nomenclatura escrita, para evitar que el niño busque directamente los datos numéricos y le aplique una operación determinada.
- Ejemplo: “Juan tiene cuatro cromos y su padre le da cinco más”.
- En una primera etapa de iniciación a la resolución de problemas, puede plantearse cada dato numérico en un renglón, al objeto de facilitar su comprensión.
- “Juan tiene cuatro cromos” - “Su padre le da cinco más” - “¿Cuántos cromos tiene ahora?”
- Evitar redacciones excesivas, concretando al máximo los datos y la pregunta a realizar, pero con cuidado de no ahorrar en exceso y que la comprensión pueda quedar comprometida. Ejemplo:
- En lugar de redactar: “María tiene 8 años, su padre 30 más y su madre 3 menos que el padre. ¿Cuántos tienen entre los tres?” Redactaríamos:
- “María tiene ocho años. - Su padre tiene treinta años más. - Y su madre tres años menos que su padre. - ¿Cuántos años tienen entre los tres?”
- Utilizar palabras clave que les permitan distinguir claramente qué operación deben realizar. Ejemplo: “Juan tiene cuatro cromos y su padre le da cinco más”.
- Cuando estas palabras clave no estén directamente en el enunciado, el maestro/a deberá introducirla, bien durante la lectura o durante la comprensión del texto.

Si lo que pretendemos es mejorar el proceso de resolución del alumno tendremos que evitar los ejercicios rutinarios de mera aplicación y, en su lugar, proponer tareas:

- Desafiantes para el alumno: a veces esto se consigue con un simple cambio en la formulación del problema. Ejemplo, en lugar de “Comprueba que...”, proponer “Un amigo mío afirma que... ¿es verdad?”.
- Que requieran la aplicación de nuevos procedimientos de solución que surjan de la combinación de aquéllos que ya domina el alumno.

- Ejercitarlos en la duda constante, incluyendo datos que no sean relevantes, situaciones problemáticas absurdas, problemas de pensamiento lateral,...

4.1.2.- Resolución de problemas:

El modelo más clásico, pero aún vigente, de las fases por las que atraviesa la resolución de problemas matemáticos es el descrito por Polya. Para él la resolución de problemas es un proceso que consta de cuatro fases:

- Comprensión del problema
- Planificación
- Ejecución del plan
- Supervisión

Este modelo ha inspirado la gran mayoría de los modelos de resolución de problemas que se han elaborado posteriormente. En la Tabla I puede observarse que, pese a las diferencias terminológicas y de precisión del análisis, los modelos de resolución de problemas que han seguido al de Polya guardan estrechos vínculos.

Nuestro planteamiento de intervención para la resolución de problemas se basa en estas cuatro fases, las cuales hemos adaptado para su uso en los básicos niveles de Primaria. Así que antes de enfrentarnos a un problema planteamos en voz alta, de forma reiterativa, los mismos pasos, los cuales se detallan a continuación y que pueden tener distintas variables, dependiendo del nivel en el que nos encontremos y del número de operaciones implicadas que puede contener. Así pues, nuestros pasos son:

- 1º.- Entender el problema.
- 2º.- Realizar una representación gráfica del problema.
- 3º.- Trazar un plan de actuación.
- 4º.- Realizar la operación que hemos deducido.
- 5º.- Comprobar la respuesta.

4.2.- Pasos para la resolución de problemas

1er PASO: “ENTENDER EL PROBLEMA”:

Partimos de la base que hemos seguido los consejos, del apartado “Redacción del enunciado del problema” a la hora de redactar o de elegir un problema para que resuelvan nuestros alumnos/as.

En este primer paso hacemos referencia a la identificación y definición del problema. La

identificación supone el reconocimiento de la existencia de un problema y de la necesidad de resolverlo. La mayoría de los problemas matemáticos que tienen que resolver los alumnos no exigen ningún esfuerzo de este tipo, puesto que el problema ya se les ha presentado como tal.

La definición del problema consiste en la decodificación de los símbolos escritos y en la conversión del enunciado matemático en una representación mental.

Para lograr la correcta comprensión del problema, deben ser capaces de identificar los datos relevantes de los que no lo son, para lo cual podemos utilizar las siguientes estrategias:

1.- Realizamos la lectura del problema, esta debe realizarse de forma progresiva:

- Lectura en voz alta por parte de uno o varios alumnos, primero del planteamiento y luego de la pregunta.

- La lectura irá acompañada de preguntas del maestro en busca de la comprensión del mismo, estas preguntas nunca deben contener en sí la respuesta. Ejemplo. “de que va”, “que nos cuenta”, “de qué cosas habla” “de quién habla”, “qué les ha pasado”...

- En tanto no exista una comprensión del texto, se repetirá sucesivamente la lectura, por otros alumnos, de un grupo determinado de ellos o del grupo entero, al objeto de que la dispersión de pensamiento se vayan concentrando en su comprensión.

- Después de leerlo con pausa y reflexionando, es importante intentar responder a las siguientes preguntas:

- ¿Entiendes todo lo que se dice?
- ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?
- ¿Distingues cuáles son los datos?
- ¿Sabes a qué quieres llegar?
- ¿Tenemos toda la información que necesitamos?
- ¿Hay información que no necesitamos?
- ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

2.- Subrayaremos con lápiz rojo los datos del problema y en azul la pregunta, al objeto de separar los datos de las preguntas.

3.- El alumno explicará, con sus propias palabras, el enunciado a un compañero: señalando cuál es la pregunta del problema, indicando los datos que hacen falta para resolver el problema y separando los datos relevantes de los que no lo son.

4.- Cuando el problema contenga más de una operación, es necesario que lo separe en cada una de sus partes, para resolver cada una de ellas en relación con las restantes partes y con el enunciado total de problema.

5.- Otras tácticas que podemos realizar son:

- Escribir de modo esquemático el contenido de cada frase del enunciado.
- Reproducir el texto utilizando frases cortas y sencillas.
- Decir en voz alta el enunciado, recalcando las palabras clave.
- Asegurarnos que conoce lo que queremos encontrar, los datos y las relaciones entre los datos.
- Asegurarnos que comprende de donde partimos y qué queremos, así como las operaciones posibles para llegar del estado inicial al e final.
- Si la representación de un problema no conduce a la solución, trata de volver a formular el problema.

En resumen, buscamos no solo la capacidad de análisis de la información que aparece en el enunciado, sino también la “autoevaluación” que hace de su conocimiento de la tarea, del nivel de dificultad y de las posibilidades de éxito.

2º PASO: “REALIZAR UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA “

Este paso que en los modelos de resolución de problemas se encuentra englobado dentro de otras fases, nosotros lo hemos sacado y otorgado más relevancia, debido a que en los niveles educativos de Infantil y primeros Ciclos de Primaria, la representación gráfica, en el trabajo diario se nos ha presentado, como un elemento clave, tanto para la comprensión del problema, como para la introduciendo en la resolución de problemas y en aquellos casos que la redacción del mismo les resulte especialmente difícil.

La representación mediante diagramas, gráficos o dibujos, no es la única estrategia de este tipo que podemos usar, también es aconsejable que a los niños se les planteen situaciones problemáticas teatralizadas, con cuentos de forma oral y manipulando objetos para que ellos los puedan representar de distintas formas.

Un recurso didáctico que da muy buenos resultados es la utilización de programas informáticos que a través del juego les planteen situaciones problemáticas. Este recurso tiene la ventaja, aparte de que el recurso en sí ya es motivador, que presenta de forma gráfica y en

movimiento los problemas, y es este último aspecto, “el movimiento”, el mejor recurso que podemos usar, ya que ven directamente cómo se desarrolla el planteamiento del problema.

Una vez superada esta fase es aconsejable continuar mediante la representación gráfica de los datos del problema y en aquellos casos que la representación gráfica venga impresa en el libro de texto, pararnos a analizar los dibujos.

3er PASO: “TRAZAR UN PLAN DE ACTUACIÓN”:

Esta fase consiste en la planificación de la solución. Se trata ahora de diseñar el esquema de actuación a seguir, lo que supone identificar las metas y las posibles submetas cuando tratamos de problemas en los que debemos realizar operaciones intermedias, examinar las diversas estrategias generales que podemos aplicar y elegir las acciones que se llevarán a cabo.

En este punto vamos a trazar un plan de actuación. Para ello podemos utilizar diferentes estrategias.

- Utilizar palabras clave que mediante la asociación directa con la operación (juntar/unir con sumar, quitar/separar con restar) se les irán familiarizando poco a poco y les permitirá reconocer la operación a realizar en situaciones similares. Ejemplo: “¿Qué tenemos que hacer junta o quitar? (unir/separar)”
- Si se duda entre posibles operaciones, efectuamos una estimación y mediante el ensayo y error llevamos a cabo todas las posibilidades y vemos que solución se ajusta al resultado más lógico y esperado.
- Recordar un problema conocido de estructura análoga al que tengamos y tratar de resolverlo.
- Resolver un problema similar más simple o equivalente, simplemente cambiando el tema del que trate el problema.
- Si la numeración de los datos es muy alta, resolverlo con números más sencillos y utilizar el modelo empleado para resolver el problema original.
- Identificar las posibles submetas que pueda englobar un problema de varias operaciones. Esto supone la división del problema en partes, cada una de las cuales es imprescindible para llegar a la solución final:
 - Si es el maestro el que identifica las distintas submetas, tendrá que delimitar cada una de las partes del problema y colocar en cada parte los datos correspondientes, solicitando del alumno que ponga en cada apartado la solución correspondiente, haciendo comprender al alumno que la solución hallada es el dato que necesitará para resolver la siguiente submeta.

- Si es el alumno el que ha de identificar cada una de las submetas, tendrá que tener en cuenta qué es lo que ha logrado con cada una de las operaciones que realiza para ir obteniendo los datos que requiere para alcanzar la pregunta final del problema.
- Si el texto tuviera más datos de los necesarios para la resolución del problema, anotar sólo los que hagan falta.
- Por su parte el profesor deberá plantear al alumno preguntas al objeto de ayudarlo en su camino hacia encontrar la solución, como por ejemplo:
 - ¿Cuál es el problema?
 - ¿Qué estás haciendo?
 - ¿Por qué estás haciendo esto?
 - ¿Qué estamos tratando de hacer aquí?
 - ¿Cómo te ayuda lo que estás haciendo para alcanzar la solución?
 - ¿Qué información nos dan?

4º PASO: “REALIZAR LA OPERACIÓN QUE HEMOS DEDUCIDO”:

Una vez configurado el plan, el paso siguiente es hacer que el alumno lleve a cabo las estrategias que eligió previamente. Para ello, conviene que el alumno se tome el tiempo necesario para resolver el problema. En caso de dificultad debe solicitar ayuda para que el maestro le haga sugerencias que le permitan avanzar en la resolución del problema.

Igualmente aquí el papel de maestro será de guía mediante preguntas del tipo: ¿estamos siguiendo los pasos que decidimos?, ¿cuál es la operación matemática que debemos elegir?, ¿necesitamos un nuevo plan?,...

En esta fase uno de los mayores problemas con las que se encuentra el alumno es la traducción simbólica, en términos numéricos, de las ideas lógicas que ya ha realizado. Son capaces de resolverlo mentalmente, pero no con los algoritmos matemáticos necesarios. En este caso habrá que reforzar el significado de los distintos significados de las operaciones aritméticas y los verbos de acción y/o palabras clave que nos llevan a ellas.

Muchas veces en esta etapa de la resolución de problemas se pueden producir atascos, en los cuales no se debe tener miedo a volver a empezar desde el principio, o dejar para otro momento, suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia nos lleve al éxito.

5º PASO: “COMPROBAR LA RESPUESTA “:

Esta fase es la de verificación, de mirar hacia atrás, recorrer los pasos que se han seguido para la resolución del problema con objeto de detectar posibles errores o deficiencias. Sobre todo si se ha cometido un error debemos comprobar las decisiones tomadas (análisis de la información, ejecución de los cálculos, etc.) y de los resultados del plan ejecutado (exactitud de la respuesta, correspondencia con el enunciado que la originó, etc).

Es muy común por parte del alumnado, que una vez realizadas las operaciones:

-Den por terminado el problema sin que exista una respuesta escrita a la pregunta que planteaba el problema.

-Dar una respuesta escrita numérica pero sin acompañarla de la aclaración que del significado al dato.

-No realicen una reflexión de los resultados obtenidos que refuercen el proceso realizado.

-No se inmutan ante respuestas absurdas, ya que no realizan una correspondencia entre la solución alcanzada y el enunciado del problema que le permita comprobar el dato obtenido. (Ejemplo: Que el resultado del problema de que la edad de Manolito sea de 120 años)

El maestro de forma dirigida deberá introducir al alumnado, en un proceso en el que se planteen las siguientes preguntas:

- ¿El resultado obtenido tiene lógica?
- ¿El dato responde a la pregunta planteada?
- ¿Utiliza todos los datos importantes?
- ¿Cuadra con las estimaciones y predicciones razonables realizadas?
- ¿Es posible encontrar una solución más sencilla?
- ¿Se puede resolver el problema de un modo diferente?
- ¿Es posible utilizar la estrategia empleada para resolver otros problemas?

El principal problema del entrenamiento específico en heurísticos está en que los alumnos tienen problemas para aplicar los heurísticos aprendidos a nuevos problemas. Sin embargo con la práctica los alumnos irán interiorizando estas estrategias hasta llegar a plantearlas de manera espontánea.

Otra manera de mejorar los procesos de autocontrol del alumno es enseñarle a realizar estimaciones de los problemas que resuelve para compararlos con los resultados que obtiene y, de esta forma, modificar o no el proceso de resolución seguido. Así mismo, cuando las estimaciones no cuadren, les plantearemos preguntas del tipo: ¿qué fue lo que funcionó?, ¿qué podríamos hacer de manera distinta la próxima vez?,...

5.- TIPOS Y SECUENCIACIÓN DE PROBLEMAS EN PRIMARIA

La enseñanza-aprendizaje de los problemas matemáticos debe contemplar todo tipo de problemas, ya que variedad que se utilizan en el aula aportados por los libros de texto y los cuadernillos de trabajo, no suele ser completo ni variado, como vemos en el análisis de realizaremos de estos materiales.

Por ello nosotros partimos de la idea de que si trabajamos todos los tipos de problemas, graduándolos en conocimientos y conceptos, y aplicamos los pasos que ya hemos visto cada vez que nos enfrentemos a uno, deberemos mejorar el rendimiento de los alumnos en la resolución de los problemas matemáticos.

En el apartado 4 sobre el análisis de los tipos de problemas en Primaria, de estructura aditiva y multiplicativa, realizábamos una pormenorizada clasificación de los tipos de problemas existentes y de su graduación a lo largo la misma. A continuación completamos dicha graduación con otros tipos de problemas que completarían la variedad necesaria de la cual hemos hablado.

5.1.- Realización de variedad de problemas

Cómo indicamos la heurística en sí no garantizan que los alumnos aprendan a resolver problemas, pero su ejercitación en la mayor variedad posible, sí aumenta sus probabilidades de éxito ante nuevos problemas, así que además de los tradicionales problemas también pueden realizar ejercicios del tipo:

PROPUESTAS	EJEMPLOS
Descubrir el dato que falta en un problema.	“Si diez pájaros están en un árbol. ¿Cuántos quedarán?”.
Reconocer datos superfluos o innecesarios en la redacción del problema.	“Antonio tiene setenta y cinco céntimos, su madre le da tres caramelos. Si gasta cincuenta céntimos en una libreta. ¿Cuántos céntimos le quedan?”.
Enunciados de problemas, donde falten datos o estén mal formulados, a fin de que los alumnos se descubran el error.	“Rocío tiene tres manzanas en la mano derecha y otras pocas en la izquierda. ¿Cuántas manzanas tiene en total?”.
Enunciar problemas, donde se planteen situaciones imposibles.	“Si tengo veinticinco kilos de patatas, y gasto veinticuatro euros. ¿Cuántos kilos de patatas me quedan?”.
Buscar los datos necesarios en una lista o gráfico	
Proponer problemas divergentes que cultiven la creatividad.	“Si tienes X euros. ¿Qué podrías hacer con ellos?”.

Problemas que permitan combinar distintos datos.	“Si tenemos varios objetos cada uno con su precio y tienes treinta y seis euros. ¿Qué puede comprar, para que no te falte ni te sobre dinero?”
Plantear falsas relaciones. “Si un niño tarda veinte minutos en llegar a la escuela. ¿Cuánto tardarán cuatro niños?”.	Plantear falsas relaciones. “Si un niño tarda veinte minutos en llegar a la escuela. ¿Cuánto tardarán cuatro niños?”.
Problemas sin números para que el niño explique cómo lo resolvería.	“Si tú supieras lo que vale un lápiz. ¿Cómo harías para saber lo que valen varios?”. Resolver problemas por estimación. “¿Cuántas canicas tendremos entre Luís, Manolo y Pedro si cada uno tiene 9, 11 y 5?”.
Problemas sin números para que el niño explique cómo lo resolvería.	“Si tú supieras lo que vale un lápiz. ¿Cómo harías para saber lo que valen varios?”. Resolver problemas por estimación. “¿Cuántas canicas tendremos entre Luís, Manolo y Pedro si cada uno tiene 9, 11 y 5?”.
Plantear situaciones problemáticas de las que sean posibles formular varias preguntas.	“El equipo de X ganó doce partidos de los treinta jugados y el equipo Y ganó solo ocho”¿?, ¿?, ¿?,...
Resolver problemas que admitan más de una solución	
Problema de conflicto, donde aparentemente sedice una cosa, pero realmente es la contraria.	“Si un pastor que tiene quince ovejas, se le mueren todas menos nueve. ¿Cuántas ovejas le quedan?”
Problemas de lógica	“Sabendo que todos los animales que tengo en casa son perros menos dos, todos son gatos menos dos y que todos son loros menos dos. ¿Cuántos animales tengo en casa?”
Problemas de pensamiento lateral. En este tipo de problemas se trata de encontrar soluciones imaginativas, distintas, que se apartan del clásico enfoque de cualquier problema cotidiano.	“Una persona que dispone de una barca para atravesar un río desde una orilla a la otra, tiene que pasar un lobo, una cabra y un arbusto. El problema es que en cada viaje solo puede pasar a uno de los tres y no puede dejar solos, en ninguna de las dos orillas, al lobo y a la cabra porque el lobo la mataría, y tampoco puede dejar solos a la cabra y al arbusto porque la cabra se lo comería. ¿Cómo pasará a los tres a la otra orilla?”

5.2.- Cómo plantear la creación de problemas propios:

Una vez que los alumnos/as vaya alcanzando destrezas en la técnica de resolución de problemas, se les debe pedir que creen, redacten y realicen una variedad más amplia de problemas, con lo cual mejoramos la experiencia y las posibilidades de éxito cuando se enfrente a nuevos retos problemáticos.

Para iniciar en la redacción de nuevos problemas matemáticos debemos tener en cuenta las siguientes acciones básicas:

- El tema: elegir el asunto del problema.
- La estructura: decidir si los problemas llevarán los datos directos, inversos o superfluos, de una o varias operaciones y si tendrá información gráfica o no.
- La situación inicial: decidir cómo se presentarán los datos conocidos.
- La pregunta: expresar, partiendo de los datos, qué quiero saber, y en función de la estructura, las preguntas que realizaremos.
- La resolución del problema: cómo llego de lo conocido a lo desconocido.

Para Polya, la forma más fácil de crear nuevos problemas es mediante analogías, partiendo de problemas conocidos. Debemos tener en cuenta que la analogía, para crear nuevos problemas, deberá hacer referencia a la similitud en el planteamiento, no a solución. Entre estos recursos podemos usar, principalmente:

- Cambiar los papeles que juegan los datos y la incógnita.
- Generalizar, particularizar, y emplear analogías.

También podremos generar nuevo problemas a partir de:

PROPUESTA	EJEMPLO
Dadas preguntas redactar los enunciados de las mismas.	“¿Cuántos lápices compré?”
Dada una o varias operaciones, inventar el problema.	“Inventa un problema en que el resultado sea una suma de resultado 8”
A partir de datos lógicos, plantear la pregunta y resolver el problema	“Juan tiene cuatro peces y compra dos más. ¿? ”.
Dadas unas preguntas buscar los datos que nos hagan falta para resolver un problema.	“¿Cuántos magdalenas nos habremos comido si quedan cinco?”.

PROPUESTA	EJEMPLO
Proponer problemas donde, una vez resuelto, puedan obtenerse nuevos problemas aplicando operaciones aritméticas inversas.	“Juan tiene cinco cromos y le dan siete más. ¿Cuántos tiene ahora”. Inversa “Si Juan tiene doce cromos y regala 5. ¿Cuántos tiene ahora”.
A partir de un enunciado simple, aumentar el enunciado con más datos relacionados.	“Juan tiene una colección de catorce cromos y su abuelo le compra seis más. ¿Cuántos tendrá ahora?”. Añadiríamos: “su hermano le da los doce suyos”, “les gana a sus amigos nueve”,...
De un enunciado con una sola pregunta, pero con datos suficientes, aumentar en el número de preguntas.	“En un partido de baloncesto Juan ha encestado ocho veces, Luis doce veces y Manuel quince veces. ¿Cuántas canasta hicieron?”. Añadiríamos: “¿Cuántos puntos lograron?, ¿Cuántas canastas más encestó Manuel que Juan?”
A partir de un problema resuelto, realizar otro igual con más datos.	
Inventar problemas similares a los dados.	
Inventar problemas sacando datos de un texto, gráfico o situación.	

6.- RECURSOS DIDÁCTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

6.1.- Consideraciones a tener en cuenta:

Muchos de nosotros hemos vivido, como alumnos/as, la enseñanza de las matemáticas cuando el lápiz, el cuaderno, la tiza y la pizarra eran los únicos elementos que acompañaban la explicación del maestro/a; explicación que se limitaba, en muchos casos, a dar unos enunciados que se debían memorizar, que nadie podía discutir, ni siquiera comentar, y que eran el preludio de una serie de ejercicios que había que resolver.

Desde entonces han cambiado muchas cosas: libros de texto agradables y bien ilustrados, ordenadores, videos, recursos manipulables, se puede comentar y preguntar, con mucha más libertad, al maestro/a, pero debemos plantearnos hasta qué punto hemos conseguido cambiar la idea de fondo y si realmente admitimos que para aprender hay que reelaborar los

conocimientos en un proceso en el que es preciso tantear soluciones, comentar ideas y razonar resultados, y en el que cada cual participa a la vez de forma individual y como miembro de una colectividad.

La realidad, en muchísimas aulas sigue siendo que la forma en que se enseña la resolución de problemas no ha cambiado mucho de lo descrito anteriormente, manteniéndose la misma metodología que a través de generaciones de alumnos/as han dado los mismos resultados negativos.

Para cambiar la realidad actual, aparte de lo que ya hemos expuesto hasta ahora, debemos tener en consideración otros aspectos, en cuanto la resolución de problemas:

- Los problemas que se plantean al alumno/a deben tener una implicación personal en la propuesta, ya sea porque corresponda a alguna situación de la vida diaria o a algunas de sus aficiones. Cuando se consigue, el interés y la significatividad de la propuesta aumentan notablemente y se obtienen mejores resultados:
 - Que el alumno tenga la oportunidad de definir una situación como problemática, sin atribuírsela directamente como tal.
 - Que el problema sea práctico, de manera que le vea un sentido lógico.
 - Que el problema admita más de una solución que permita una mayor participación en la clase.
 - Que el problema admita más de un método para alcanzar la solución.
 - Proponerles situaciones en las que tengan un papel activo, es decir, plantearles algo que tengan que hacer, por ejemplo: distribuir cosas entre..., buscar todos los que tengan..., construir una figura que sea...
- El maestro debe transmitir al alumno, a través de sus palabras y metodología, confianza en su capacidad para resolver problemas, así como comunicarles la dificultad de la tarea que hay que realizar y el grado de esfuerzo que exige, porque el alumno tiende a experimentar una gran satisfacción cuando es capaz de resolver un problema desafiante y, en caso de fracaso, ante una tarea difícil que demanda una gran cantidad de esfuerzo, el alumno podrá reconocer que el error no es resultado de su falta de competencia. Esta última atribución le animará a volverlo a intentar.
- No utilizar los problemas de los libros de texto y cuadernillos de apoyo, sin un análisis previo de si se adaptan o no a las pautas expuestas y del grado de dificultad que suponen. Por otro lado, como se ha descrito, hay que alternar diversas formas de plantear un problema para que los alumnos/as no se acostumbren a una sola manera de identificar los datos que se les suministran y los datos que se les piden.
- Es conveniente trabajar la resolución de problemas en pequeños grupos donde el alumno se vea obligado a ser claro y a justificar su proceso de resolución. Estos trabajos pueden

favorecer el intercambio de ideas en torno a la resolución de problemas y que el alumno tome conciencia de que un mismo problema puede abordarse a través de distintos procedimientos, todos ellos válidos, igualmente este método de trabajo y el compartir las dificultades puede contribuir a que éstas se vivan con menos carga de angustia.

- Hay que cambiar los criterios de evaluación de la resolución de problemas del alumno/a, no sólo la obtención de una respuesta correcta es apreciable, sino que se deben valorar otros aspectos de la resolución: el conocimiento informal del alumno, el uso que hace de procedimientos y estrategias personales para adaptar la instrucción a esos conocimientos previos, la planificación, la identificación y la justificación de los métodos de solución empleados. Es curioso ver cómo, en ocasiones, un simple error de cálculo da al traste con un esquema de trabajo correcto en todos sus aspectos, y es valorado negativamente.
- Se deben emplear recursos didácticos variados en la resolución de problemas. Entre ellos, programas informáticos e internet. No hay que olvidar tampoco la importancia de la mecanización. Las matemáticas hay que comprenderlas, pero también hay que practicarlas con el fin de alcanzar un dominio que permita utilizarlas economizando esfuerzos; por lo tanto, deben proponerse también ejercicios encaminados a conseguir una automatización de determinadas habilidades.
- La utilización de creatividad en el aula que nos permitirá orientar a los alumnos a descubrir problemas, con estrategias más específicas como:
 - -Dramatizar en clase técnicas de compra y venta que nos ayuden a dominarlas.
 - -Matematizar situaciones de la vida cotidiana.
 - -Utilizar e inventar juegos matemáticos: rompecabezas, numerogramas, criptogramas, jeroglíficos, sudokus,...
 - -Interpretar y elaborar planos, sobre todo planos que les sean significativos. Ejemplo: Esconder un mensaje secreto en la clase, patio,... y mediante un plano con pistas deberán encontrarlo.
 - -Hacer traducciones del lenguaje ordinario al lenguaje matemático.
 - -Reproducir a escalas edificios, estatuas, etc.
 - -Utilizar cuentos para introducir contenidos o plantear situaciones problemáticas.

6.2.- Posibles Recursos Didácticos

6.2.1.- Los cuentos como herramientas en la resolución de problemas.

En Infantil y Primer Ciclo de Primaria una herramienta muy útil para mantener la atención de los alumnos/as, es hacer uso de los cuentos orales para introducirlos en contenidos nuevos o plantear situaciones problemáticas.

Para ello deberemos tener en cuenta:

- Convertir el problema en un relato de cuento a la imagen de la estructura de los típicos cuentos infantiles.
- La acción ha de transcurrir de modo ininterrumpido.
- Las frases y palabras reiterativas son totalmente necesarias.
- Representar dramáticamente la acción, de forma visual a la vez que auditiva.
- Con sencillez y claridad, sin dar importancia a lo que se sabe.
- Con tranquilidad, sin correr.
- El niño debe disfrutar con la historia.
- Para captar su atención se puede relacionar la historia con su vida cotidiana:
“Había una vez un(a) niño(a), que se llamaba (nombre del niño(a)) como tú, y...”
- Despertar expectación: hay que meterse dentro del problema: modular la voz y adaptar los gestos a la historia es tan importante o más que lo que se cuenta. Hay que introducir pausas en los momentos cumbre para incrementar el interés.
- No olvidar el ritmo: Es preciso que pasen cosas llamativas y con rapidez.
- En toda la narración se debe colocar al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo la continuación del cuento, participando en el mediante preguntas dirigidas por el maestro.

6.2.2.- Las TIC como herramientas en la resolución de problemas.

Las Tecnologías de la Información se convierten en una magnífica herramienta para que nuestros alumnos aprendan y apliquen sus conocimientos en la resolución de problemas.

Queremos destacar en este documento la web “ProblemaTICas” –Primaria, a lo que podemos acceder desde la web del INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado), dentro del Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.

ProblemáTICas”, es un medio, un recurso, una propuesta que se ofrece al profesorado para; facilitarle su difícil tarea de enseñar matemáticas, en relación con la resolución de problemas, favoreciendo un cambio de enfoque en el problema. Recursos como éste contribuyen a que el profesorado pueda ahorrarse algunas explicaciones ineficaces mientras todos los alumnos trabajan de manera autónoma o semidirigida y el profesorado se dedica más a orientar, a reconducir, a atender mejor la diversidad del aula... facilitando una matemática para todos, y no sólo para los másaptos.

Podemos trabajar online o descargar los materiales o en el siguiente enlace:

<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/index.html>



BIBLIOGRAFÍA:

DE LA ROSA, José Miguel “Didáctica para la resolución de problemas “

ALGARABEL, S.; DASÍ, C.; GOTOR, A.; PEREA, M.: “Solución de problemas: Una revisión de la importancia del uso de heurísticos y una evaluación de su utilización en matemáticas”, en Revista Española de Pedagogía, 203, (1996), pp. 143-165.

ALONSO GARCÍA, V.: “Estrategias operativas en la resolución de los problemas matemáticos en los niños del ciclo medio de la E.G.B.”, en Aula Abierta, 47(12), (1986), pp. 165-196.

ÁLVAREZ, S. y CRUZ, M. “Estrategias metacognitivas en la formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática”. Publicación interna del ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

DE GUZMÁN, Miguel “Enseñanza de las Ciencias y la Matemática”. España.

Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada. “Resolución de problemas aritméticos en educación primaria”. <http://centros6.pntic.mec.es/equipo.general.ponferrada/>

GERMÁN BERNABEU SORIA “100 Problemas matemáticos, Recursos para el aula” Jerónimo Juidías Barroso y Isabel R. Rodríguez Ortiz. “Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos”. Revista de Educación, 342. Eneroabril 2007, pp. 257-286

GODINO JUAN D. “Didáctica de las Matemáticas para Maestros”. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

LABARRERE, A. “Como enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas”. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

LURIA, A. R.; Y TSVETKOVA, L. S. “La resolución de problemas y sus trastornos”. Barcelona: Fontanella.

MARTINEZ MONTERO, JAIME. “Una nueva DIDÁCTICA DEL CÁLCULO para el siglo xxi”. Monografías Escuela Española.

NURIA GIL IGNACIO, LORENZO J. BLANCO NIETO, ELOÍSA GUERRERO BARONA (Universidad de Extremadura). “El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos”

POLYA, G. “Como plantear y resolver problemas”. Editorial Trillas, México.

RICO, L. “Errores en el aprendizaje de las matemáticas”. Kilpatrick, J, Gómez, P y Rico, L (Editores) Educación matemática. México: Grupo editorial Iberoamericana.

SANTOS, L. M., "Resolución de problemas: el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas", Revista Matemática Educativa, vol. 4, núm. 2, agosto

ANEXOS:

ESTRATEGIA GENERAL PARA RESOLVER UN PROBLEMA
INICIACION, INTERIORIZACIÓN Y EJERCITACIÓN (Ciclo 1º)

PARA RESOLVER UN PROBLEMA

TENGO QUE RECORRER CUATRO PASOS.

1.- LEO DESPACIO EL PROBLEMA DOS O TRES VECES...DESPUÉS...

- CIERRO LOS OJOS Y ME CUENTO EL PROBLEMA...
 - SÉ.....
 - QUIERO CALCULAR.....

2.- TRATO DE RELACIONAR LO QUE SÉ CON LO QUE QUIERO CALCULAR... (Si no tengo claro qué operación tengo que plantear..)

- HAGO UN ESQUEMA SOBRE LA RECTA NUMÉRICA
RELACIONO EN EL ESQUEMA LOS DATOS Y LA PREGUNTA DEL PROBLEMA...

3.- PLANTEO LA OPERACIÓN QUE RESUELVE EL PROBLEMA.

- EL ESQUEMA INDICA CUÁL ES ESA OPERACIÓN.
 - ESCRIBO LA OPERACIÓN A REALIZAR...
 - HALLO EL RESULTADO DE LA OPERACIÓN...
 - ESCRIBO LA RESPUESTA A LA PREGUNTA DEL PROBLEMA...

4.- COMPRUEBO LA RESPUESTA OBTENIDA...

- LLEVO LA SOLUCIÓN , COMO UN DATO MÁS , AL TEXTO DEL PROBLEMA....YA NO HAY PREGUNTA
- LEO LA HISTORIA QUE RESULTA¿TODO ENCAJA ¿

ESTRATEGIA GENERAL (2° y 3° ciclo)

1.- COMPRENDER EL PROBLEMA

Leo el problema varias veces. Cierro los ojos y me lo cuento.

- ¿Qué sé?... ¿Cuáles son los datos?....
- ¿Qué quiero calcular?... ¿Cuál es la pregunta?...

2.- PENSAR UN PLAN DE RESOLUCIÓN

- Me pregunto qué podría calcular con los datos del problema.
- Pienso en lo que voy a ir calculando y en qué orden lo voy a hacer, hasta llegar a la solución.

3.- EJECUTAR EL PLAN PENSADO

Tengo que indicar para qué hago cada cálculo...

- Primero calculo.....
- Después calculo.....
- Por fin calculo.....

Al final escribo la respuesta completa a la pregunta del problema.

4.- COMPROBAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Repaso toda la ejecución del plan.

Llevo la respuesta al texto del problema. Leo la historia que resulta

¿Es lógica? ¿Todo encaja?

ESTRATEGIA GENERAL (6º curso)

1. COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA.

- Subrayo los datos y la pregunta del problema.
- Me cuento el problema de forma “telegráfica”. Sé... y... y... (Datos)
Con estos datos tengo que calcular... (Pregunta)

2. IDEAR UN PLAN DE RESOLUCIÓN.

- Pienso en lo que podría calcular con los datos del problema.
- Pienso en lo que voy a ir calculando y en qué orden lo voy a hacer, para
Llegar a la solución.

3. EJECUTAR EL PLAN PENSADO.

- Tengo que escribir para qué hago cada cálculo.
 - Primero, calculo...
 - Después, calculo...
 - Después, calculo...
- Al final escribo la respuesta completa a la pregunta del problema.

4. COMPROBAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA.

- Repaso toda la ejecución del plan.
- Llevo la respuesta al texto del problema y... pienso si la historia que resulta es lógica... ¿Todo encaja?